دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۳۴۱. کوچک‌ترین عدد دو رقمی را پیدا کنید که برابر مجموع مکعب یک رقم خود و مربع رقم دیگر باشد.

۳۴۲. A، B و C معرف سه رقم متفاوت هستند و داریم: $\overline{BACC}+\overline{AABB}=\overline{CCBA}$. ارقام را مشخص کنید.

۳۴۳. در بازهٔ ۱۰۰ تا ۴۰۰ چند توان کامل (مربع، مکعب و...) وجود دارد؟

۳۴۴. ۱۳۹۶-امین رقم بعد از اعشار عدد $\frac{1}{14}$ چقدر است؟

۳۴۵. ثابت کنید، رقم یکان $3^n \times 7^{n+1}$ برای هر عدد طبیعی n، مقدار ثابتی است.

۳۴۶. n عددی چهار رقمی است با ارقام متمایز، به‌طوری که 9n نیز چهاررقمی است و ارقام آن همان ارقام n هستند با ترتیب عکس، n را بیابید.

۳۴۷. همهٔ عددهای صحیح x را پیدا کنید، به‌طوری که x^2+3 بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

۳۴۸. کوچک‌ترین عدد طبیعی $n\neq 1$ را پیدا کنید، به‌طوری‌که $1+2+...+n$ مربع کامل باشد.

۳۴۹. **علی** می‌گوید 2^{x^2} برابر نیست با $(2^x)^2$. **رضا** می‌گوید ممکن است برابر باشند. کدام‌یک درست می‌گویند؟ به ازای چه مقادیری از x، این دو عدد برابر هستند؟

۳۵۰. a و b دو عدد طبیعی هستند، به‌طوری که: $a^2+24=b^2$. بیشترین مقدار a+b را بیابید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۳۱۱. عدد گویای r را بیابید، به‌طوری که:

$$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\pi r$$

با فرض $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\alpha$

داریم:

$$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\alpha-\tan^{-1}\frac{2}{9}.$$

از دو طرف تانژانت می‌گیریم:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}=\frac{\tan\alpha-\frac{2}{9}}{1+\frac{2}{9}\tan\alpha}$$

با ساده کردن تساوی مقدار $\tan\alpha$ به‌دست می‌آید که برابر است با ۱. بنابراین: $\alpha=\frac{\pi}{4}$ و $r=\frac{1}{4}$.

۳۱۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+1+1^2}+\tan^{-1}\frac{1}{1+2+2^2}+\dots+\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2}<\frac{\pi}{4}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2}=\tan^{-1}\frac{(n+1)-n}{1-n(n+1)}$$
$$=\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}(n)$$

در نتیجه:

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+1+1^2}+\dots+\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2}$$
$$=(\tan^{-1}2-\tan^{-1}1)+(\tan^{-1}3-\tan^{-1}2)$$
$$+\dots+(\tan^{-1}(n+1)-\tan^{-1}(n))=\tan^{-1}(n+1)-\frac{\pi}{4}$$

چون: $\tan^{-1}(n+1)<\frac{\pi}{2}$، پس حاصل عبارت از $\frac{\pi}{4}$ کمتر است.

۳۱۳. مقادیر a، b و c را بیابید، به‌طوری که برای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ داشته باشیم:

$$f(0)=f(1)=f(2)=1396$$

با جای‌گذاری مقدارهای ۰، ۱ و ۲ در ضابطهٔ تابع به دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر می‌رسیم:

$$c=1396,\ a+b+c=1396,\ 4a+2b+c=1396$$

با حل این دستگاه به جواب‌های $c=1396$ و $b=0$ و $a=0$ می‌رسیم.

بنابراین: $f(x)=1396$.

۳۱۴. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases}x^2=y-\frac{1}{4}\\ y^2=x-\frac{1}{4}\end{cases}$$

با جمع دو رابطه خواهیم داشت:

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}=0$$

در نتیجه: $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=0$.

بنابراین: $x=y=\frac{1}{2}$.

۳۱۵. چند تابع f از A={۱,۲,۳,۴} به A می‌توان تعریف کرد به‌طوری‌که:

الف) f(۲)>f(۳)

ب) $f(1)\neq f(2)$

ج) برد تابع مجموعه‌ای دوعضوی باشد.

ابتدا مسئله را در سه حالت جداگانه حل کنید. سپس در حالتی مسئله را حل کنید که سه شرط را با هم در نظر می‌گیرید.

۱) ابتدا دو مقدار برای f(۲) و f(۳) انتخاب می‌کنیم ($\binom{4}{2}$ انتخاب) که مقدار بزرگ‌تر f(۲) و مقدار کوچک‌تر f(۳) است. برای f(۱) و f(۴) نیز چهار انتخاب داریم. در نتیجه $N_1=6\times4^2=96$ انتخاب وجود دارد.

۲) بـرای f(۱)، چهار انتخاب و برای f(۲)، سه انتخاب و برای f(۳) و f(۴) هر کدام چهار انتخاب داریم. در نتیجه در کل $N_{۱}=۴^{۳}×۳$ تابع وجود دارد.

۳. ابتدا ۲ عضو انتخاب می‌کنیم ($\binom{۴}{۲}$ انتخاب). سپس برای هر عضو A، ۲ انتخاب داریم. در نتیجه $N_{۱}=۶×۴^{۲}$ انتخاب وجود دارد. اما از $۲^{۴}$ انتخاب برای مقدار تابع دو حالت قابل قبول نیست. در نتیجه تعداد توابع برابر است با: $N=۶×(۲^{۴}-۲)$ یعنی: N=۸۴.

اگر بخواهیم سه شرط را با هم در نظر بگیریم، باید $f(۱)=f(۳)<f(۲)$ و f(۴) باید با f(۲) یا f(۱) برابر باشد. در نتیجه ابتدا دو مقدار از A برای برد تابع انتخاب می‌کنیم ($\binom{۴}{۲}$ انتخاب). سپس برای f(۴) دو انتخاب داریم. در نتیجه در کل ۲×۶=۱۲ انتخاب داریم.

۳۱۶. این گزاره را ثابت یا رد کنید: «زیرمجموعهٔ S از اعداد صحیح نامنفی به‌گونه‌ای وجود دارد که هر عدد صحیح نامنفی را به‌صورت یکتایی به فرم x+2y می‌توان نوشت؛ به قسمی که: $x,y\in S$.

می‌توان ثابت کرد، مجموعهٔ S شامل تمام عددهای نامنفی که در مبنای ۴، فقط رقم‌های ۱ یا ۰ در آن‌ها به‌کار رفته است، در شرایط مسئله صدق می‌کند.

با یک مثال که قابل تعمیم است، این موضوع را نشان می‌دهیم. هر عدد دلخواه N در مبنای ۴ شامل رقم‌های ۰ تا ۳ خواهد بود (برای مثال $N=(۱۲۰۳۱)$). عدد $N_{۱}$ را از روی N به این صورت تعریف کنید که به جای هر رقم ۳ و ۲ به ترتیب رقم ۱ یا ۰ را بگذارید (در این مثال $N_{۱}=(۱۰۰۱۱)_{۴}$). در نتیجه $N-N_{۱}$ شامل رقم‌های صفر یا ۲ خواهد بود ($N-N_{۱}=(۰۲۰۲۰)_{۴}$) و $\frac{N-N_{۱}}{۲}$ دو برابر عضوی از S خواهد شد.

پس: $N=N_{۱}+۲(\frac{N-N_{۱}}{۲})$ که در آن $N_{۱}$ و $\frac{N-N_{۱}}{۲}$ عضوهایی از S هستند.

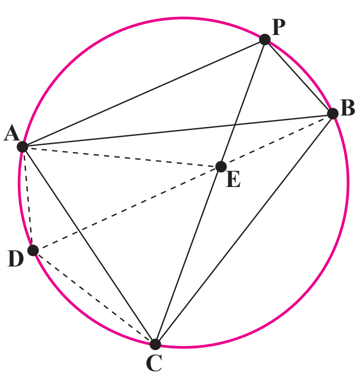
۳۱۷. نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به سه رأس مثلث وصل کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع طول دو پاره‌خط کوچک‌تر در میان PA، PB و PC با طول پاره‌خط بزرگ‌تر برابر است.

از نقطهٔ B به موازات AP خطی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند (شکل ۱). داریم: $\widehat{AD}=\widehat{PB}$. اما چون دو مثلث APB و ADC هم‌نهشت هستند، در نتیجه: DC=AP و AD با PC موازی است. از توازی AP و BD و توازی AD و PC نتیجه می‌شود:

AD=PE=PB

همچنین، از دو توازی فوق نتیجه می‌شود: AP=DC=AE.

اما چون زاویهٔ BDC برابر ۶۰° است، پس مثلث DCE متساوی‌الاضلاع است و: AP=CE. به‌طور مشابه ثابت می‌شود، مثلث PEB هم متساوی‌الاضلاع است. در نتیجه: EP=PB و حکم نتیجه می‌شود.

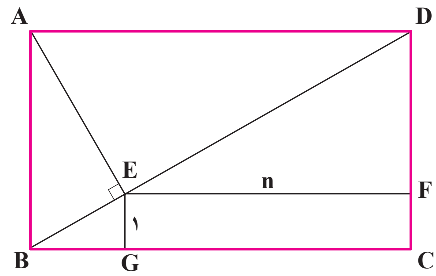


شکل ۱

توضیح: اگر با قضیهٔ بطلمیوس آشنایی داشته باشید، به سادگی می‌توانید با استفاده از آن در چهارضلعی APBC حکم را اثبات کنید.

۳۱۸. در مستطیل ABCD با طول قطر d، عمود AE را بر قطر BD رسم کرده‌ایم. اگر طول اضلاع مستطیل EFCG برابر ۱ و n باشد، ثابت کنید: $\sqrt[3]{d^2}=\sqrt[3]{n^2}+1$. نقطهٔ F روی DC و نقطهٔ G روی B است.

اگر طول BG را x فرض کنیم (شکل ۲)، از قضیهٔ فیثاغورس داریم: $AB=1+x^2$ و $AE=x\sqrt{1+x^2}$ و $BE=\sqrt{1+x^2}$ (از تشابه دو مثلث ABE و BEG استفاده کنید).



شکل ۲

بنابراین: $PF=x^2$ و $EF=n=x^3$. چون مثلث ADF با دو مثلث قبلی متشابه است. حال از قضیهٔ فیثاغورس نتیجه می‌شود:

$$ED=x^2\sqrt{1+x^2}\Rightarrow d=BE+ED=(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow d^{\frac{2}{3}}=1+x^2=1+n^{\frac{2}{3}}$$

۳۱۹. حاصل جمع ده جملهٔ متوالی از یک دنباله هندسی برابر ۱۸ و حاصل جمع معکوس آن‌ها برابر ۶ است. حاصل‌ضرب این ده جمله را به‌دست آورید.

می‌دانیم:

$$\sum_{k=1}^{10} ar^k=ar\frac{r^{10}-1}{r-1} \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{ar^k}=\frac{1}{ar}=\frac{r^{-10}-1}{r^{-1}-1}$$

از تقسیم این دو برهم داریم:

$$3=\frac{18}{6}=\frac{ar\frac{r^{10}-1}{r-1}}{\frac{1}{ar}\cdot\frac{r^{-10}-1}{r^{-1}-1}}=a^2r^{11}$$

اکنون حاصل‌ضرب ده جمله برابر است با:

$$ar.ar^{1}.....ar^{10}=a^{10}r^{55}=(a^2r^{11})^5=3^5=243$$

۳۲۰. حاصل‌ضرب دو عدد سه رقمی $\overline{2A5}$ و $\overline{13B}$ مضرب ۳۶ است، همهٔ مقادیر ممکن برای دو رقم A و B را بیابید.

چون ۹×۴=۳۶ و $\overline{2A5}$ فرد است، پس $\overline{13B}$ مضرب ۴ است و B=۲ یا B=۶. اگر B=۲، آن‌گاه ۱۳۲ مضرب ۳ است و بنابراین $\overline{2A5}$ باید مضرب ۳ باشد. پس: ۸ یا ۵ یا ۲=A. و اگر B=۶، آن‌گاه $\overline{2A5}$ باید مضرب ۹ باشد و در نتیجه: A=۲. بنابراین برای (A , B) چهار جواب، (۸,۲)، (۲,۲)، (۵,۲) و (۲,۶) به‌دست می‌آید.